Faculté des Sciences Juridiques Economiques et Sociales- Fès **Année universitaire : 2013 / 2014**

Série 4: T.D de " Statistiques III"- semestre 3 - Sections : A - B – C - D

==

Exercice 1:

A partir d'une population de moyenne μ et de variance σ^2, on tire un échantillon aléatoire simple (X_1 , X_2 , ……., X_n).

1- Montrer que $\left(\bar{X}\right)^2$ est un estimateur biaisé de μ^2.

2- En déduire un estimateur sans biais de μ^2 .

Exercice 2:

Soit $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, un échantillon aléatoire de *loi de Bernoulli* de paramètre p et soit

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } \bar{X} = \frac{S}{n}$$

1- Montrer que $\bar{X}$ est un estimateur sans biais et consistant de p .

2- On cherche à estimer la variance $\sigma^2 = p\left(1-p\right)$. On propose l'estimateur $\hat{U} = \bar{X}\left(1-\bar{X}\right)$.

a- Montrer que $\hat{U}$ est un estimateur biaisé de σ^2 .

b- Donner un estimateur $\hat{V}$ sans biais de σ^2, fonction de $\hat{U}$.

Exercice 3:

On considère une variable aléatoire X pour laquelle on propose deux modèles :

1<u>er modèle</u> : $f(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{2\Pi}} e^{\frac{-\theta x^2}{2}}$ 2<u>ème modèle</u> : $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\Pi}\,\theta^{\frac{3}{2}}} x^2 e^{\frac{-x^2}{\theta}}$

On suppose que dans les deux modèles le paramètre $\theta > 0$.

Donner l'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) du paramètre θ dans chacun des deux modèles proposés.

Exercice 4:

Soit *(X_1 ; X_2 ; ……..X_n)* un échantillon aléatoire simple d'une variable aléatoire *X* de densité :

$$f(x)=\begin{cases} 2\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif. On donne $E(X^2) = \theta$ et $V(X^2) = \theta^2$.

1-Calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance de θ .

2-L'estimateur $\hat{\theta}$ de θ est-il : sans biais ? convergent ? efficace ?.

Exercice 5 :

Soit X une variable aléatoire continue dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6t^4} e^{\frac{-x}{t}} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

Où **t** est un paramètre réel strictement positif inconnu. On admet que E(X) = 4t et V(X) = $4t^2$.

1- Calculer l'EMV $\hat{T}$ du paramètre inconnu **t**.

2- $\hat{T}$ est-il sans biais ? convergent ? efficace ?