# *CHAPITRE IV*: Séries chronologiques

## I- Généralités

### 1) Définition

On appelle « série chronologique » toutes suite temporelle d'observations chiffrées, les observations sont effectuées à des intervalles de temps réguliers (années, mois, jours,…). On notera par $x(t)$ la valeur prise par la grandeur $X$ à la date $t$ et par $T$ la date de la dernière observation.

Exemple : Les données sont obtenues à partir des données trimestrielles pendant 3 années consécutives. On considère la série suivante :

| $t$ | $x(t)$ |
|---|---|
| 1 | 24 |
| 2 | 25 |
| 3 | 29 |
| 4 | 24 |
| 5 | 24 |
| 6 | 27 |
| 7 | 30 |
| 8 | 26 |
| 9 | 27 |
| 10 | 29 |
| 11 | 32 |
| 12 | 29 |

On peur représenter ces données à l'aide d'un tableau à double entrée de la manière suivante :

| $I$ \ $J$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 25 | 29 | 24 |
| 2 | 24 | 27 | 30 | 26 |
| 3 | 27 | 29 | 32 | 29 |

$J$ correspond au rang du trimestre.
$I$ correspond au rang de l'année.

Les observations sont périodiques et la période est égale à 4.
L'étude d'une série chronologique permet d'effectuer des prévisions, c'est-à-dire d'estimer des valeurs futures, $x(t)$ non disponible, autrement dit pour $t > \mathrm{T}$.

Dans notre exemple $T = 12$, les valeurs $x(12+h)$ ne sont pas disponibles $(h = 1, 2, .....)$. Pour que ceci soit possible, il est nécessaire que le comportement général à l'aide d'un modèle mathématique basé sur trois composantes essentielles :

a) Le mouvement conjoncturel (ou extra-saisonnier) ou la tendance (ou *trend*). Cette composante, notée $y(t)$, décrit le mouvement de croissance général de la série.
b) Le mouvement saisonnier : cette composante, notée $s(t)$, décrit les variations saisonnières de la série, qui correspondent à des fluctuations permanentes, et se propagent de la même manière à des intervalles réguliers.
c) Le mouvement erratique : cette composante, notée $e(t)$, décrit les aléas, les fluctuations accidentelles de faible amplitude dues à des causes multiples difficieles à individualiser.

## II- Modélisation d'une chronique à tendance linéaire.

Notations : $x(t)$ : valeur brute de la série au temps $t$.
$y(t)$ : la tendance.

$s(t)$ : le mouvement saisonnier de période $p$.

$e(t)$ : les aléas.

On adopte couramment les deux schémas suivants :

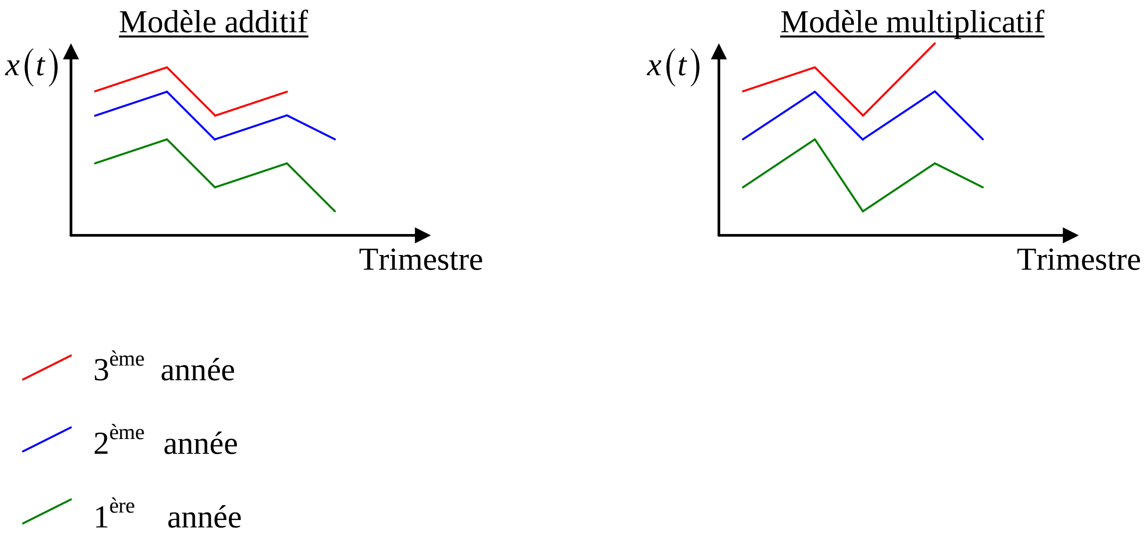
- Un modèle à coefficients saisonniers additifs : $x(t) = y(t) + s(t) + e(t)$.
- Un modèle à coefficients saisonniers multiplicatifs : $x(t) = y(t) \times (1 + s(t)) + e(t)$.

### 1) <u>Choix du modèle</u>

On utilise la méthode graphique :

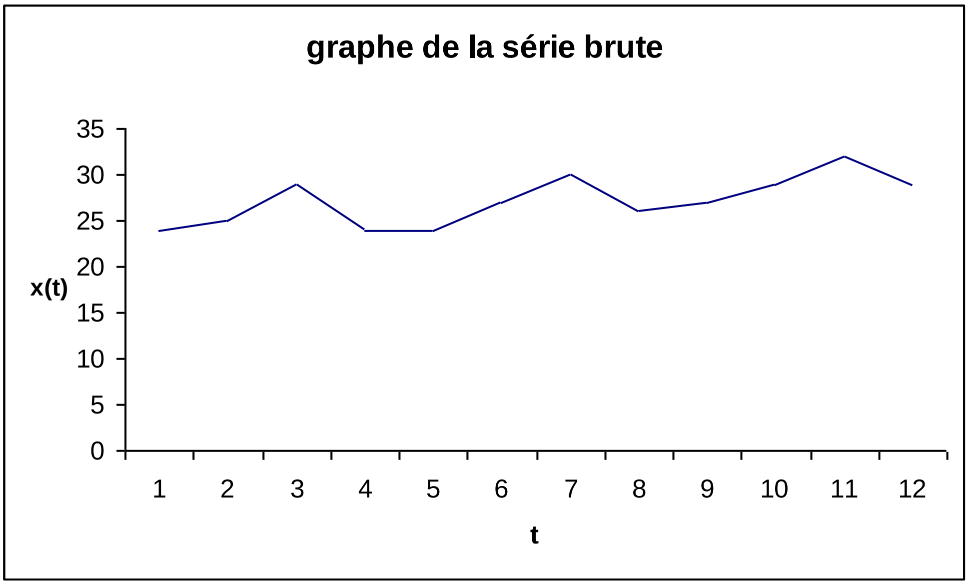
- Si les variations saisonnières se retrouvent d'année en année avec une amplitude constante, alors on retient le modèle additif.
- Si les variations saisonnières sont proportionnelles au niveau atteint par la série, alors on opte pour le modèle multiplicatif.

<u>La méthode graphique :</u> lorsque le graphe ne permet pas de trancher dans le pratique, on privilégie le modèle multiplicatif. La méthode graphique se base sur les « courbes annuelles superposées ».

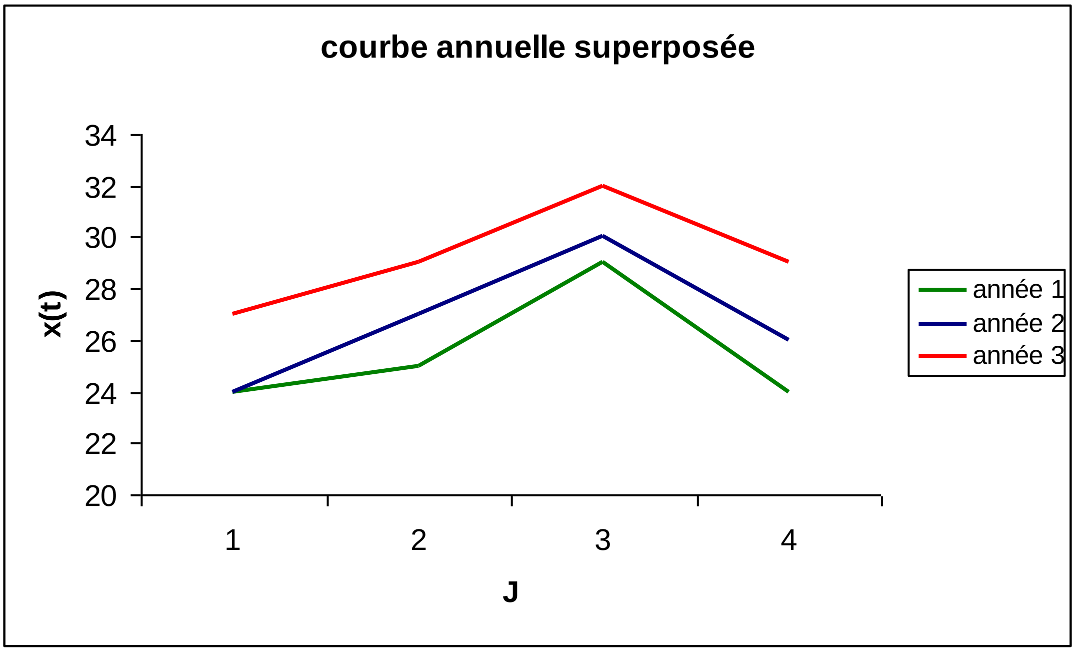


Application :

Graphe de la série brute :




Courbe annuelle superposée :




On retient le modèle multiplicatif car les courbes annuelles superposées ne sont pas parallèles.

2) Estimation préliminaire de la tendance.

Lorsque la tendance est linéaire, la méthode la plus simple et la plus utilisée est le lissage par moyenne mobile.

La moyenne mobile centrée d'ordre $p$ est notée $M_p(t)$.

- Si $p$ est impair (c'est-à-dire $p=2m+1$), alors :

$$M_p(t)=\frac{1}{p}\times\left[x(t-m)+x(t-(m-1))+.....+x(t+(m-1))+x(t+m)\right].$$

- Si $p$ est pair (c'est-à-dire $p=2m$), alors :

$$M_p(t)=\frac{1}{p}\times\left[\frac{x(t-m)}{2}+x(t-(m-1))+.....+x(t+(m-1))+\frac{x(t+m)}{2}\right].$$

Illustration numérique :

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 84 | 123 | 165 | 108 | 103 | 137 |

Calculons : $M_3(t)=\frac{1}{3}\times\left[x(t-1)+x(t)+x(t+1)\right]$.

Pour $t=1$, on a : $M_3(1)$ est non-définie car $x(0)$ est non disponible.

Pour $t=2$, on a : $M_3(2)=\frac{1}{3}\times\left[x(1)+x(2)+x(3)\right]=\frac{84+123+163}{3}=124$.

Pour $t=3$, on a : $M_3(3)=\frac{1}{3}\times\left[x(2)+x(3)+x(4)\right]=132$.

Pour $t=4$, on a : $M_3(4)=125.3$.

Pour $t=5$, on a : $M_3(5)=116$.

Pour $t=6$, on a : $M_3(6)$ est non-définie car $x(7)$ est non disponible.

On a alors :

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | 84 | 123 | 165 | 108 | 103 | 137 |
| $M_3(t)$ | --- | 124 | 132 | 125.3 | 116 | --- |
| $M_4(t)$ | --- | --- | 122.38 | 126.5 | --- | --- |

Car : Pour $t=1$, on a : $M_4(1)$ est non-définie car $x(-1)$ est non disponible.

Pour $t=2$, on a : $M_4(2)$ est non-définie car $x(0)$ est non disponible.

Pour $t=3$, on a : $M_4(3)=\frac{1}{4}\times\left[\frac{x(1)}{2}+x(2)+x(3)+x(4)+\frac{x(5)}{2}\right]=122.38$.

Pour $t=4$, on a : $M_4(4)=\frac{1}{4}\times\left[\frac{x(2)}{2}+x(3)+x(4)+x(5)+\frac{x(6)}{2}\right]=126.5$.

Propriétés d'une moyenne mobile :

a) Une moyenne mobile est opérateur linéaire, c'est-à-dire :

- $M_p(t)(X+X')=M_p(t)(X)+M_p(t)(X')$
- $M_p(t)(\lambda\times X)=\lambda\times M_p(t)(X)\quad(\forall\lambda\in\mathbb{R})$

b) Une moyenne mobile de longueur d'ordre $p$ arrête une fonction périodique de période $p$.

c) Une moyenne mobile transforme une fonction affine de la forme $y = a \times t + b$ en elle même.

d) Une moyenne mobile transforme la série des aléas $e(t)$ en une série $\varepsilon(t)$ moins dispersée ou plus lisse.

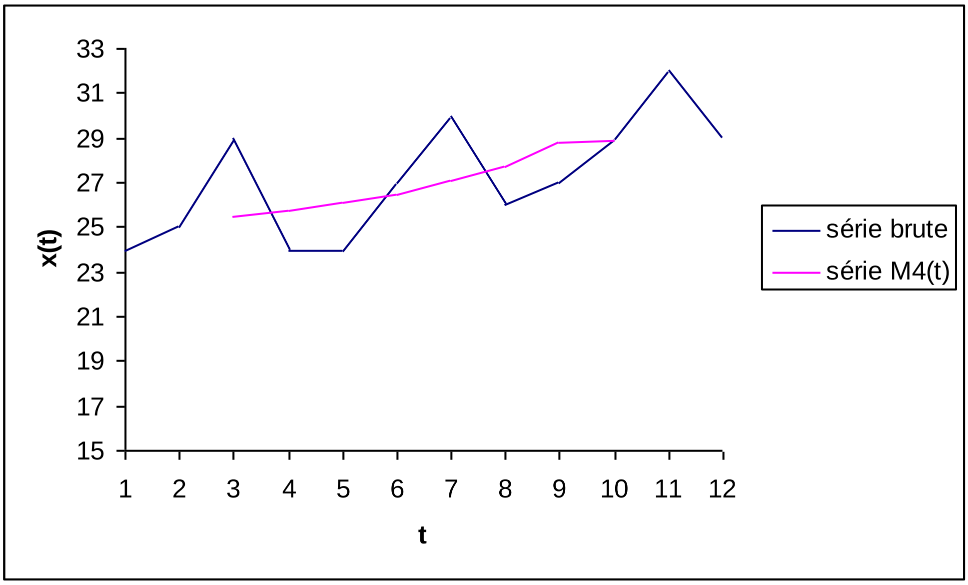
Série brute : $x(t)$

| J / I | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 25 | 29 | 24 |
| 2 | 24 | 27 | 30 | 26 |
| 3 | 27 | 29 | 32 | 29 |

Série : $M_4(3) = \frac{1}{4} \times \left[ \frac{x(t-2)}{2} + ..... + \frac{x(t+2)}{2} \right]$

| J / I | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | --- | --- | 25.5 | 25.75 |
| 2 | 26.125 | 26.5 | 27.125 | 27.75 |
| 3 | 28.75 | 28.875 | --- | --- |

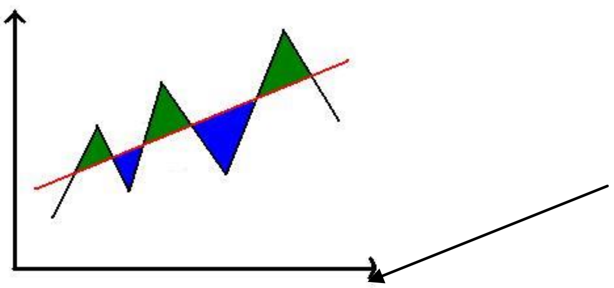
<u>Graphe :</u>




3) <u>Estimation du mouvement saisonnier.</u>

Hypothèses fondamentales sur le mouvement saisonnier : $s(t + k \times p) = s(t)$, c'est-à-dire, $s$ est une fonction périodique de période $p$.

<u>Exemple :</u> Pour $p = 4$ et $t = 1$, on a : $s(1+4) = s(1) = s(1+2\times4) = s(9)$



Sur tout intervalle de longueur $p$, la somme des aires au-dessus de la tendance est égale à la somme des aires en dessous => Hypothèse de conservation des aires (HCA).

Courbe de tendance

On a alors :

somme des aires en dessous

=

somme des aires au dessus

3.1) Le modèle additif : $x(t)=y(t)+s(t)+e(t)$.

a) On calcule les écarts saisonniers : $s(t)=x(t)-M_p(t)$.

b) Estimation préliminaire des coefficients saisonniers $s(J)$ en imposant à $s(t)$ de vérifier la périodicité, soit par la médiane, soit par la moyenne, en ne retenant qu'une seule valeur.

c) Estimation définitive des coefficients saisonniers $s(J)$ en imposant à $s'(t)$ de vérifier la loi des aires, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{p} s'(t)=0$, pour une intervalle de longueur $p$, en remplaçant $s(J)$ par $s'(J)=s(J)-\sum_{j=1}^{p}\frac{s(J)}{p}$.

<u>Par exemple</u> : $s'(1)=s(1)-\sum_{j=1}^{4}\frac{s(J)}{4}=-1.6875-\frac{0.0625}{4}=1.7$.

| $I \backslash J$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | --- | --- | 3.5 | -1.75 |
| 2 | -2.125 | 0.5 | 1.875 | -1.75 |
| 3 | -1.25 | 0.125 | --- | --- |
| $s(J)$ | -1.6875 | 0.3125 | 3.1875 | -1.75 |
| $s'(J)$ | -1.7 | 0.3 | 3.2 | -1.8 |

3.2) Le modèle multiplicatif : $x(t)=y(t)(1+s(t))+e(t)$.

d) On calcule les écarts saisonniers : $1+s(t)=\frac{x(t)}{M_p(t)}$.

e) Estimation préliminaire des coefficients saisonniers $1+s(J)$ en imposant à $1+s(t)$ de vérifier la périodicité, soit par la médiane, soit par la moyenne, en ne retenant qu'une seule valeur.

f) Estimation définitive des coefficients saisonniers $1+s(J)$ en imposant à $1+s'(t)$ de vérifier la loi des aires, c'est-à-dire $\sum_{j=1}^{p}(1+s'(t))=0$, pour une intervalle de longueur $p$, en remplaçant $1+s(J)$ par $1+s'(J)=s(J)-\dfrac{1+s(t)}{\sum_{j=1}^{p}\dfrac{1+s(t)}{p}}$.

Par exemple : $1+s'(1)=4\times\dfrac{1+s(1)}{4.01}=4\times\dfrac{1+0.94}{4.01}=094$.

| I \ J | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | --- | --- | 1.14 | 0.93 |
| 2 | 0.93 | 1.02 | 1.11 | 0.94 |
| 3 | 0.96 | 1 | --- | --- |
| $s(J)$ | 0.94 | 1.01 | 1.125 | 0.935 |
| $s'(J)$ | 0.94 | 1 | 1.12 | 0.94 |

4) Désaisonnalisation d'une chronique.

Définition : On appelle série corrigée des variations saisonniers (série CSV) la série $z(t)$ obtenue de la manière suivante : $z(t)=x(t)-s'(t)$ , pour un modèle additif.

$z(t)=\dfrac{x(t)}{1+s'(t)}$ , pour un modèle multiplicatif.

$z(t)$ représente l'estimation définitive de la tendance.

Application numérique :

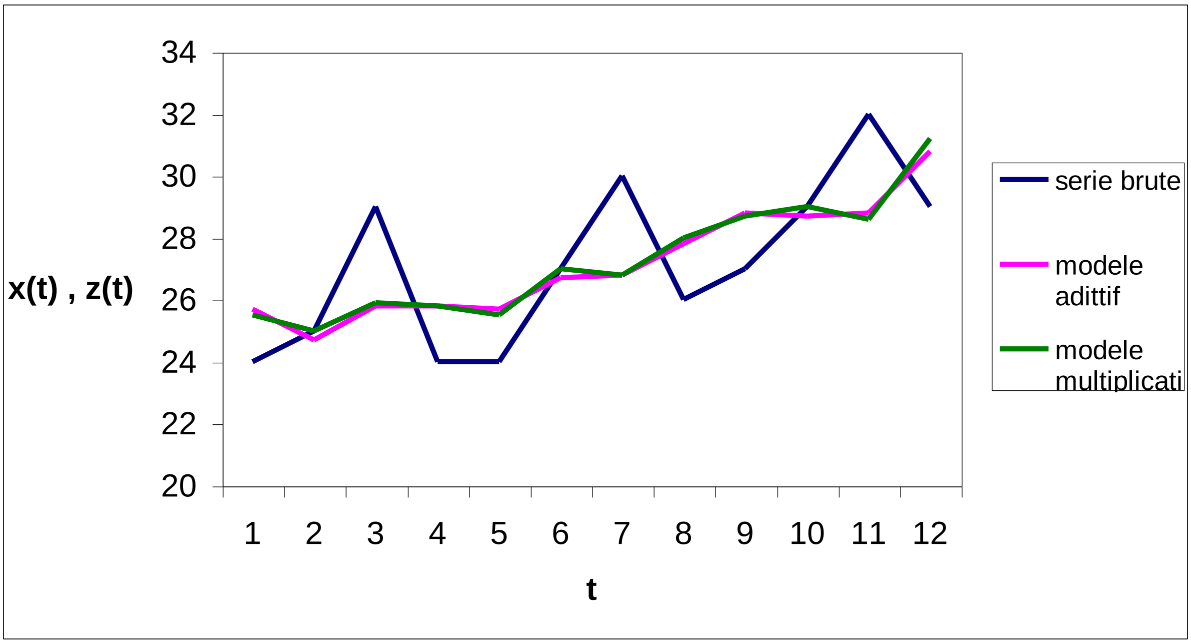
Modèle additif :

| $t$ | $x(t)$ | $s'(t)$ | $z(t)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | -1.7 | 25.7 |
| 2 | 25 | 0.3 | 24.7 |
| 3 | 29 | 3.2 | 25.8 |
| 4 | 24 | -1.8 | 25.8 |
| 5 | 24 | -1.7 | 25.7 |
| 6 | 27 | 0.3 | 26.7 |
| 7 | 30 | 3.2 | 26.8 |
| 8 | 26 | -1.8 | 27.8 |
| 9 | 27 | -1.7 | 28.8 |
| 10 | 29 | 0.3 | 28.7 |
| 11 | 32 | 3.2 | 28.8 |
| 12 | 29 | -1.8 | 30.8 |

Modèle multiplicatif :

| $t$ | $x(t)$ | $1+s'(t)$ | $z(t)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 24 | 0.94 | 25.5 |
| 2 | 25 | 1 | 25 |
| 3 | 29 | 1.12 | 25.9 |
| 4 | 24 | 0.93 | 25.8 |
| 5 | 24 | 0.94 | 25.5 |
| 6 | 27 | 1 | 27 |
| 7 | 30 | 1.12 | 26.8 |
| 8 | 26 | 0.93 | 28 |
| 9 | 27 | 0.94 | 28.7 |
| 10 | 29 | 1 | 29 |
| 11 | 32 | 1.12 | 28.6 |
| 12 | 29 | 0.93 | 31.2 |

Représentation Graphique :




5) Prévisions :

Effectuer une prévision consiste à estimer à partir des valeurs $x(T+h)$ avec $(h=1,2,...)$.

1ère étape : La tendance décrite par $z(t)$ étant linéaire, on peut donc remplacer $z(t)$ par une fonction $\hat{z}(t)=a\times t+b$ qui est l'équation de la droite d'ajustement $D_{z/t}$.

2ème étape : $\hat{x}(T+h)=\hat{z}(T+h)+s'(T+h)$ si le modèle est additif.

ou $\hat{x}(T+h)=\hat{z}(T+h)\left(1+s'(T+h)\right)$ si le modèle est multiplicatif.

Détermination de $a$ et de $b$ :

$a=\dfrac{\operatorname{cov}(z(t),t)}{V(t)}$ et $b=\bar{z}-a\times\bar{t}$ ( $\bar{z}$ et $\bar{t}$ étant les moyennes respectives de $z(t)$ et de $t$ )

Application numérique : Cas du modèle multiplicatif :

Déterminons les prévisions du 1er trimestre et du 2ème trimestre de la 4ème année, c'est-à-dire $\hat{x}(13)$ et $\hat{x}(14)$. On détermine $\hat{z}(t)=a\times t+b$, avec $a=\dfrac{\operatorname{cov}(z(t),t)}{V(t)}$ et $b=\bar{z}-a\times\bar{t}$.

$$\operatorname{cov}(z(t),t)=\frac{\sum_{t=1}^{12} z(t)}{12}-(\bar{z}\times\bar{t})$$

Or on a : $\bar{z}=\sum_{t=1}^{12}\dfrac{z(t)}{12}=\dfrac{(25.5+25+.......+31.2)}{12}=27.18$

Et : $\bar{t}=\sum_{t=1}^{12}\dfrac{t}{12}=\dfrac{(1+2+......+12)}{12}=\dfrac{12\times(12+1)}{2\times12}=6.5$

Puis enfin : $\sum_{t=1}^{12} \frac{z(t)\times t}{12} = \frac{374.19}{12} = 182.4$.

Nous avons donc : $\operatorname{cov}(z(t),t) = 182.4 - (27.18\times 6.5) = 5.76$

De plus : $V(t) = \sum_{t=1}^{12} \frac{t^2}{12} - (\bar{t})^2 = 13$.

Nous pouvons alors trouver $a$ et $b$ : $a = \frac{5.76}{13} = 0.48$ et $b = 27.18 - (0.48\times 6.5) = 24.04$.

Nous avons alors l'équation de la droite d'ajustement $D_{z/t}$ : $\hat{z}(t) = 0.48t + 24.04$ .

Alors nous pouvons trouver : $\hat{z}(13) = 0.48\times 13 + 24.04 = 30.32$

Et $\hat{z}(14) = 0.48\times 14 + 24.04 = 30.8$ .

Et nous pouvons en déduire :

$$\hat{x}(13) = \hat{z}(13)\left(1 + s'(13)\right) = \hat{z}(13)\times 0.94 = 28.5$$

$$\hat{x}(14) = \hat{z}(14)\left(1 + s'(14)\right) = \hat{z}(14)\times 1 = 30.8$$