USMBA
Département des Sciences Economiques et Gestion
- Fès-

Année Universitaire 2015/2016
S2 Module : Calcul des Probabilités
Sections E & F

Prof : D.TOUIJAR

Epreuve de Calcul des Probabilités

(Durée : 2h00)

Exercice 1 : six femmes et sept hommes se présentent à un recrutement pour trois postes de travail identiques.
1) Combien de recrutements distincts sont possibles ? Justifier.
2) Combien de recrutements distincts sont possibles sachant que l'on embauche deux hommes et une femme ?

Exercice 2 : Dans une urne, on dispose de huit jetons numérotés de la façon suivante : quatre jetons numérotés 1, trois jetons numérotés 2, un jeton numéroté 3 et on dispose d'un dé équilibré. On tire au hasard un jeton puis on lance le dé. On note le numéro du jeton et la valeur du dé.
1) Déterminer l'univers Ω.
On considère la variable aléatoire X associant à chaque épreuve le numéro obtenu par le dé,
2) Déterminer $X(\Omega)$ puis la loi de probabilité de X.
3) Déterminer la fonction de répartition de X puis en faire une représentation graphique.
4) Déterminer E(X) et V(X).

Exercice 3: Soit X une VA à densité $f(x) = \begin{cases} k(2-2x) & si\ 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$

1) Déterminer la constante k.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) Calculer P(X > 0,5) et E(X).

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire de loi normale $X \leadsto \mathcal{N}(3\,;4)$

1) Calculer : $P(X < 5)$; $P(X \notin [-3\ ,9])$

Soit $Y = -5X - 4$

2) Y suit-elle une loi normale ?
3) Calculer : $P(Y < -12)$

Exercice 5 : Une machine automatique fabrique des vis. Régulièrement, **3%** de la production est défectueuse. Notons par X le nombre de vis défectueuses parmi une production de $\boldsymbol{n}$ $pièces$.

1) Déterminer la loi exacte de X. Justifier

2) Calculer les probabilités des événements suivants (pour la faisabilité des calculs, vous pouvez utiliser, si besoin est, les approximations de lois convenables en vérifiant les hypothèses d'applicabilité) :

a) d'avoir moins de 2 défectueuses dans un lot de 50 vis

b) d'avoir moins de 20 défectueuses dans un lot de 500 vis

c) d'avoir moins de 200 défectueuses dans un lot de 5000 vis

3) Soit X le nombre de vis défectueuses dans un lot de 1000 pièces. Trouver le nombre N (arrondi à l'entier le plus proche) tel que : P (X < N) = 0,95.

N.B. - Arrondir les calculs à la **troisième** décimale.

- on donne quelques valeurs de la table de poisson X suit $\mathcal{P}(\lambda=15)$: $P(X \leq 20) = 0.92$ et $P(X \leq 19) = 0.88$

- on donne aussi quelques valeurs de la table Normale Z suit $\mathcal{N}(0\,;1)$: $P(Z \leq 4.145) = 1$ et $P(Z \leq 1.65) = 0.95$

$$P(Z \leq 3) = 0.999 \ \ et \ \ P(Z \leq 0.7) = 0.76 \ \ et \ \ P(Z \leq 1) = 0.84 \ \ et \ \ P(Z \leq 0.5) = 0.69$$

Epreuve de Calcul des Probabilités

(Rattrapage-Durée : 1h30)

Question de cours **:** Enoncez le théorème central limite.

Exercice 1 **:** On veut choisir, dans un club comptant 10 membres, un président, un secrétaire et un trésorier. Le cumul des charges est interdit.

1- De combien de manières peut-on attribuer ces charges si :

a) aucune restriction n'est imposée ;

b) Monsieur E doit avoir une charge ;

c) Monsieur F n'accepte que la charge de président.

2- Démontrer que ce nombre de manières vaut :

a) 672 si Messieurs A et B refusent d'officier ensemble;

b) 384 si Messieurs C et D officieront ensemble ou pas du tout.

Exercice 2 **:** Les portes ont une hauteur standard de 2,02m. Quelle est la proportion d'individus susceptibles de s'y cogner la tête (se heurter la tête contre la porte) dans une population dont la taille X (en cm) est distribuée selon la loi normale de moyenne 1,73 m et un écart-type de 20 cm ?

Exercice 3 **:** Soit un groupe de 20 employés appartenant tous à la même entreprise. L'objectif est de déterminer X, nb d'employés en faveur de l'attribution individuelle de stock-options. Selon le syndicat majoritaire dans l'entreprise, 60 % de l'ensemble des employés y seraient favorables.

1) Déterminer la loi exacte de X. Justifier.

2) Calculer, pour la loi exacte de X, la moyenne et l'écart-type de X.

3) Calculer les probabilités suivantes (Attention : on ne peut utiliser les approximations de lois qu'en vérifiant les hypothèses d'applicabilité, sinon « bonjour » la calculatrice.) :

i. $P(X < 5)$
ii. $P(X > 6)$
iii. $P(5 \leq X \leq 6)$

<u>N.B.</u>

- on donne quelques valeurs de la table de poisson X suit $\mathscr{P}(\lambda=12)$: $P(X \leq 7) = 0.09 \quad et \quad P(X \leq 8) = 0.16$

- on donne aussi quelques valeurs de la table Normale Z suit $\mathscr{N}(0\,;1)$: $P(Z \leq 3.2) = 0.9993 \quad et \quad P(Z \leq 1.65) = 0.95$

$$P(Z \leq 0.7) = 0.76 \ et \ \ P(Z \leq 1.45) = 0.93 \ \ et \ \ P(Z \leq 1) = 0.84 \ \ et \ \ P(Z \leq 0.5) = 0.69$$

Epreuve de Calcul des Probabilités

2016-17 (Durée : 1h30)

Question de cours (3 pts) : Enoncer le théorème central limite et commenter-le (ne pas dépasser 5 lignes).

Exercice 1 (8 points) :

1. Ilyas part à la cueillette des champignons. Il ne sait pas faire la différence entre un champignon comestible (qui peut être mangé) et un champignon toxique. On estime que la proportion de champignons toxiques se trouvant dans les bois (la forêt) s'élève à 0,7.

(a) Donner la loi exacte du nombre X de champignons toxiques parmi 6 ramassés au hasard. Justifier.

(b) Ilyas ramasse 6 champignons au hasard. Calculer la probabilité qu'il ramasse exactement 4 champignons toxiques.

(c) Ilyas invite Younes à une cueillette. Younes connaît bien les champignons; sur 10 champignons qu'il ramasse, 9 sont comestibles. Ce jour-là, il ramasse 4 champignons **et** Ilyas en ramasse 3. Démontrer que la probabilité que tous les champignons soient comestibles est de 0,018. (Indication : L'événement « Younes ramasse 4 comestibles» est indépendant de l'événement « Ilyas ramasse 3 comestibles»).

2. Younes cueille en moyenne 12 champignons par heure. (Indication : Penser à une loi de poisson).

(a) Calculer la probabilité qu'il ramasse exactement 8 champignons en une heure.

(b) Calculer la probabilité qu'il ramasse au moins 1 champignon en 20 minutes.

Exercice 2 (9 points) :

Dans un pays, la proportion des camionnettes par rapport à l'ensemble des véhicules est égale à 0,07.

1. Soit X le nombre des camionnettes parmi 100 véhicules choisis au hasard sur un parking contenant 2000 véhicules. Déterminer la loi exacte de X. Justifier.

2. On suppose maintenant que X suit une loi Binomiale $\mathscr{B}(100\,;0{,}07)$. Calculer $P(X \geq 5)$. (Indication : Si les calculs sont très lourds, penser à une approximation par une loi discrète qu'on précisera).

3. Soit Y le nombre de camionnettes parmi 1000 véhicules circulant sur le boulevard périphérique d'une grande ville à une heure d'affluence. Calculez $P(65 \leq Y \leq 75)$. (Indication : Penser à une approximation par une loi continue).

4. Nous choisissons n véhicules au hasard. Déterminez pour quelle valeur de n nous pouvons affirmer que la proportion des camionnettes parmi ces n véhicules est comprise entre $0{,}06$ et $0{,}08$ avec une probabilité supérieure à $0{,}95$. (Indication : Penser au T.C.L.).

N.B. - Arrondir les calculs à la **troisième** décimale.

- on donne pour la loi de poisson : X suit $\mathscr{P}(\lambda=7)$: $P(X \leq 4) = 0.173$

- on donne aussi quelques valeurs de la table Normale Z suit $\mathscr{N}(0\,;1)$: $P(Z \leq 1.96) = 0.975$ et $P(Z \leq 1.65) = 0.95$

- on donne aussi extrait de la table Normale centrée réduite : $P(Z \leq u) = F(u)$

u	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.6	0.726	0.730	0.732	0.736	0.739	0.742	0.745	0.749	0.752	0.755

Epreuve de Calcul des Probabilités

(Rattrapage-Durée : 1h30)

Question de cours : Citer <u>trois</u> lois discrètes définies à partir d'un comptage. Préciser pour chacune de ces lois son type de comptage.

Exercice 1 : A la fin d'une réunion d'anciens élèves, tout le monde se serre la main. S'il y a n personnes à la fête, combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice 2 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} 2x & si \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \quad sinon \end{cases}$

1) **a-** Démontrer que la fonction f est une densité de probabilité.
   b- Démontrer que la loi de probabilité définie par f admet une espérance mathématique et une variance que vous préciserez.
   c- Déterminer la fonction de répartition associée à f.

2) Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie ci-dessus. Nous définissons $Y = 1 + X^2$.
   Déterminer la fonction de répartition de Y.

Exercice 3 : Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(5{,}2\ ;\ 0{,}64)$.

1. Calculer la probabilité conditionnelle suivante : $\mathbb{P}(X \geq 4/X \leq 5{,}2)$.

2. Une variable aléatoire Y indépendante de la variable X suit la loi normale $(\boldsymbol{\mu}\ ;\ 0{,}64)$.

   a. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y - 2X$?

   b. Déterminer $\boldsymbol{\mu}$ sachant que $\mathbb{P}(Y \geq 2X) = 0{,}516$.

<u>N.B.</u>

- Arrondir à la ***<u>troisième</u>*** décimale.

- on donne quelques valeurs de la table Normale centrée réduite. Z $\rightsquigarrow$ $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$ **:**

$$P(Z \leq 1{,}5) = 0{,}933 \quad et \quad P(Z \leq 1.65) = 0.95$$

$$P(Z \leq 0.7) = 0.76 \quad et \quad P(Z \leq 1.45) = 0.93 \quad et \quad P(Z \leq 1) = 0.84 \quad et \quad P(Z \leq 0{,}04) = 0{,}516$$

Epreuve de Calcul des Probabilités

2017-18 (Durée : 1h30)

Exercice 1 : On lance quatre fois et indépendamment un dé bien équilibré numéroté de 1 à 6 :

1- Déterminer l'univers Ω et son cardinal.

2- Calculer les probabilités suivantes :

a) Obtenir le chiffre 1266 ;

b) Le lancer finisse par un 2;

c) Le lancer comporte au moins un chiffre 5.

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire (v.a.) de loi normale : X $\rightsquigarrow \mathcal{N}(5;4)$

1) Calculer : $P(X < 6)$; $P(X \notin [3,7])$

2) Soit $Y = -3X + 5$.

a) Déterminer la loi de Y et son(ses) paramètre(s) ;

b) Calculer : $P(Y < -13)$.

Exercice 3 : Dans un jeu de hasard, la probabilité de gagner lors d'une tentative est $= \frac{1}{5}$.

Une personne joue, indépendamment, une fois chaque jour : on suppose que les jours sont numérotés par 1,2,3,… On note X la v.a. associée au numéro du jour du premier gain.

1) X est-elle une v.a. discrète ou continue ? Déterminer la loi de X et son(ses) paramètre(s).

2) Calculer la probabilité pour que le joueur gagne avant le 5ème jour.

3) Démontrer que le nombre moyen de jours nécessaires pour gagner le jeu est de 5 jours.

N.B.

- arrondir à la troisième décimale.

Certaines valeurs ci-dessous peuvent être utilisées :

- on donne quelques valeurs de la table Normale Z suit $\mathcal{N}(0;1)$: $P(Z \leq 2) = 0,98$ *et* $P(Z \leq 1.65) = 0.95$

$$P(Z \leq 3) = 0,999 \quad et \quad P(Z \leq 1) = 0.84 \quad et \quad P(Z \leq 0.5) = 0.69$$

Epreuve de Calcul des Probabilités

(Rattrapage : Durée : 1h30)

Exercice 1 : Soit X une VA à densité $f(x) = \begin{cases} \frac{kx}{2} & si\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & sinon \end{cases}$

1) Déterminer la constante k.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) Calculer $P(X > 1)$, $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 2 : Soit Y une variable aléatoire de loi normale centrée réduite .

1. Calculer : $P\ (\ Y\ < 1{,}5\ )$; $P\ (\ Y \notin\ [-\ 2\ ,\ 2\ ]\ )$

Soit $X = 4 - Y$

1. X suit-elle une loi normale ? Justifier.
2. Calculer les paramètres de la loi de X.
3. Calculer $P\ (\ X\ <\ 2\ )$.

Exercice 3 : Soit un groupe de 30 employés appartenant tous à la même entreprise. L'objectif est de déterminer X, qui est le nombre d'employés en faveur de l'attribution individuelle de stock-options. Selon le syndicat majoritaire dans l'entreprise, 60 % de l'ensemble des employés y seraient favorables.

1. Déterminer la loi de X. Justifier.
2. Calculer les paramètres de la loi de X.
3. Calculer $P\ (\ X\ < 13\ )$.
4. Calculer $P\ (\ X\ > 15\ )$.
5. Calculer $P\ (\ X\ = 14\ )$.

Indication : pour les questions 3, 4 et 5, penser à l'approximation par une autre loi en vérifiant certaines conditions.

N.B. - Arrondir les calculs à la **deuxième** décimale.

- on donne quelques valeurs de la table de poisson X suit $\mathscr{P}(\lambda=15)$: $P(X \leq 13) = 0.36$ *et* $P(X \leq 15) = 0.57$

- on donne aussi quelques valeurs de la table Normale Z suit $\mathscr{N}\ (\ 0\ ;\ 1)$: $P(Z \leq 2) = 0.98$ *et* $P(Z \leq 1.68) = 0.95$

$P(Z \leq 1.5) = 0.93$ *et* $P(Z \leq 1.86) = 0.97$ *et* $P(Z \leq 1.12) = 0.87$ *et* $P(Z \leq 1.3) = 0.9$