

Epreuve De Statistique IV

Exercice 1 (5pts): L'an dernier le salaire hebdomadaire moyen payé par une entreprise pour les nouveaux gradués en gestion était de **2100 DH**. Cette année, à pareille date, un échantillon aléatoire de **25** gradués donne les résultats suivants : $\bar{x} = 2180$ DH et

$$\sum_{i=1}^{25} (x_i - \bar{x})^2 = 24000.$$

On considère que les salaires sont distribués selon une loi normale.

D'après les résultats de l'échantillon, peut-on conclure que le salaire hebdomadaire moyen a augmenté d'une façon significative ? On prend un risque $\alpha=5\%$.

Exercice 2 (5pts): On veut tester, avec un risque de **5%**, si les données suivantes proviennent d'une population Binomiale de paramètres ($m=6 ; p=0,2$) (voir table statistique au verso)

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_{oi}	29	37	17	7	3	2	1

Exercice 3 (6pts): Un ingénieur en contrôle de la qualité a accumulé des données sur la qualité d'un fil de tungstène utilisé dans la fabrication de filaments pour une lampe incandescente à haute puissance. Le tableau suivant représente la classification obtenue selon les déféctuosités et les fournisseurs :

		Fournisseurs		
		A	B	C
Déféctuosités	Majeures	35	25	40
	Mineures	250	150	300
	Aucune	325	275	600

Peut-on conclure, à $\alpha=5\%$, que le type de déféctuosités est indépendant du fournisseur ?

Exercice 4 (4pts) : Afin d'étudier comment varie le coût annuel (Y : en centaines de DH) de maintenance d'un véhicule utilitaire en fonction de l'âge (X : en mois) de celui-ci, une entreprise a collecté les données, sur **15** véhicules, et a calculé les valeurs suivantes ci-dessous (où $x'_i = x_i - \bar{x}$ et $y'_i = y_i - \bar{y}$) :

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 362 \quad \sum_{i=1}^{15} x_i'^2 = 3753,7 \quad \sum_{i=1}^{15} y_i = 938 \quad \sum_{i=1}^{15} y_i'^2 = 6269,7 \quad \sum_{i=1}^{15} y'_i x'_i = 4799,9$$

On cherche à tester le modèle linéaire simple $Y = \alpha_0 + \alpha_1 X + W$ où $W \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- 1)- Montrer que l'estimation par la méthode des moindres carrés de α_1 est égale à **1,279**.
- 2)- Montrer que la somme des carrés expliquée **SCE=6140,456** et résiduelle **SCR=129,244**.
- 3)- Montrer que l'estimation de la variance σ^2 est $\hat{\sigma}^2 = 9,942$. En déduire l'estimation de la variance de l'estimateur de α_1 , qu'on notera $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_1}^2$.
- 4)- Tester si la régression est significative (c.à.d. tester si $\alpha_1 \neq 0$) au risque $\alpha=5\%$.

N.B.

- arrondir les résultats, des exercices 1,3 et 4 à la troisième décimale !

-Vous aurez besoin de certaines données parmi les suivantes :

- Si Z suit la *loi normale centrée réduite* :

$$P(Z > 1,645) = 0,05 \text{ et } P(Z > 1,96) = 0,025.$$

- Si $X(n)$ est une variable aléatoire de *Khi-deux* à n degrés de liberté, on a :

$$P(X(9) > 16,9190) = 0,05 \quad P(X(3) > 7,8147) = 0,05 \text{ et } P(X(4) > 9,4877) = 0,05.$$

- Si $T(n)$ est une variable aléatoire de *Student* à n degrés de liberté, on a :

$$P(T(24) > 2,0639) = 0,025 \text{ et } P(T(24) > 1,7109) = 0,05 \text{ et } P(T(13) > 2,1604) = 0,025.$$

-La table statistique de la loi binomiale $\mathcal{B}(m=6 ; p=0,2)$

x_i	p_i
0	0,2621
1	0,3932
2	0,2458
3	0,0819
4	0,0154
5	0,0015
6	0,0001

Epreuve De Statistique IV (Rattrapage)

Problème : Les résultats suivants représentent la pression d'éclatement d'un réservoir à essence fabriqué par deux manufacturiers :

Manufacturier1	3050	3125	3150	3180	3095	3190	3160	3205	3100	3090
Manufacturier2	3085	3090	3100	3105	3115	3150	3125	3190	3170	3110

En supposant que la pression est distribuée selon une loi normale et pour ($\alpha=5\%$) :

- 1- Tester l'égalité des variances de la pression d'éclatement chez les deux manufacturiers.
- 2- En supposant que c'est l'hypothèse H_0 de **(1)** qui est vraie, tester si les deux manufacturiers donnent, en moyenne, la même pression.
- 3- Peut-on conclure que les réservoirs du manufacturier 1 sont de meilleure qualité (une pression d'éclatement plus élevée) que ceux du manufacturier 2 ?
- 4- Sans l'hypothèse de normalité, quelle autre hypothèse faut-il ajouter pour effectuer le test de la question **(2)** ? donner, sans calcul, la statistique (rapport critique) du test et sa loi.

N.B.

- arrondir les résultats à la deuxième décimale !

-Vous aurez besoin de certaines données parmi les suivantes :

- Si Z suit la loi normale centrée réduite :

$$P(Z > 1,65) = 0,05 \text{ et } P(Z > 1,96) = 0,025.$$

- Si $X(n)$ est une variable aléatoire de **Khi-deux** à n degrés de liberté, on a :

$$P(X(9) > 16,92) = 0,05 \quad P(X(10) > 20,48) = 0,025 \text{ et } P(X(9) > 19,02) = 0,025.$$

- Si $T(n)$ est une variable aléatoire de **Student** à n degrés de liberté, on a :

$$P(T(18) > 1,73) = 0,05 \text{ et } P(T(19) > 2,09) = 0,025 \text{ et } P(T(18) > 2,1) = 0,025.$$

- Si $F(n,m)$ est une variable aléatoire de **Fisher**, on a :

$$P(F(10,10) > 0,27) = P(F(9,9) > 0,25) = P(F(8,8) > 0,23) = 0,975.$$

Epreuve De Statistique IV

Exercice 1 : On dispose d'un échantillon aléatoire (X_1, X_2, \dots, X_n) relatif à la variable aléatoire parente X de moyenne inconnue μ et de variance $\sigma^2=4$ pour choisir entre les deux hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} H_0: \mu = 2 \\ \# \\ H_1: \mu = 3 \end{cases}$$

- 1) Pour un risque de première espèce $\alpha=5\%$ et une taille d'échantillon $n = 100$,
 - a) Quelle sera la conclusion pour une moyenne de l'échantillon égale à 2,4 ?
 - b) Calculer la puissance du test.
- 2) Quelle devrait être la taille de l'échantillon nécessaire pour qu'à la fois le risque de première espèce soit égal à 2,5% et celui de seconde espèce soit égal à 2,5% ?

Exercice 2 : Pour comparer deux marques d'ampoules électriques, on a effectué des essais sur deux échantillons prélevés indépendamment et au hasard. La durée de vie moyenne observée sur un échantillon de 25 ampoules de la marque 1 est de 1020heures, avec un écart type de 24h. Sur un échantillon de 13 ampoules de la marque 2, on a obtenu respectivement 1050h et 32h. Peut on considérer que ces marques sont de qualités équivalentes(même moyenne) ($\alpha =5\%$)? On suppose que la variable durée de vie suit une loi normale et que les deux variances sont égales.

Exercice 3 : Pendant 300 minutes, on note toute les minutes le nombre de voitures qui ont franchi un poste de péage sur l'autoroute, ce qui donne le tableau suivant :

Nombre de voiture	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>	<i>6</i>	<i>7</i>	<i>8</i>	<i>9</i>	<i>10</i>	<i>11</i>	<i>12</i>
Effectif observé	<i>2</i>	<i>10</i>	<i>25</i>	<i>42</i>	<i>53</i>	<i>53</i>	<i>44</i>	<i>31</i>	<i>19</i>	<i>11</i>	<i>6</i>	<i>3</i>	<i>1</i>

- 1)- Estimer la moyenne et la variance de la variable aléatoire parente (qu'on notera X).
- 2)- A quelle loi de X peut-on penser ? Justifier.
- 3)- Peut-on affirmer, qu'au risque de **5%**, les données proviennent d'une population distribuée selon une loi de poisson ?

N.B.

- arrondir tous les résultats à la troisième décimale !
- Vous aurez besoin de certaines données parmi les suivantes :

➤ Si Z suit la loi normale centrée réduite :

$$P(Z > 1,645) = 0,05 \text{ et } P(Z > 1,96) = 0,025 \text{ et } P(Z > -3,355) = 0,9996 .$$

➤ Si $X(n)$ est une variable aléatoire de **Khi-deux** à n degrés de liberté, on a :

$P(X(8) > 15,507) = 0,05$ $P(X(9) > 16,919) = 0,05$ et $P(X(10) > 18,307) = 0,05$.

➤ Si $T(n)$ est une variable aléatoire de *Student* à n degrés de liberté, on a :
 $P(T(36) > 2,028) = 0,025$ et $P(T(36) > 1,688) = 0,05$ et $P(T(38) > 2,024) = 0,025$.

➤ Table statistique de la loi de poisson de paramètre ($\lambda = 5$)

x	$P(X=x)$
0	0,007
1	0,034
2	0,084
3	0,140
4	0,176
5	0,176
6	0,146
7	0,104
8	0,065
9	0,036
10	0,018
11	0,008
12	0,004
13	0,002

Epreuve De Statistique IV (Rattrapage)

Exercice 1 : On prélève un E.A. de 16 étudiants dans un groupe ayant subi un examen. On obtient la somme des notes suivante : $\sum_{i=1}^{16} x_i = 160$

On suppose que la distribution des notes est une loi Normale de variance égale à 9.

- 1)- Peut-on affirmer que la moyenne du groupe est supérieure à 10, on prend un risque de 5% ?
- 2)- Calculer la puissance du test lorsque l' hypothèse alternative spécifie une moyenne de 12.

Exercice 2 : On veut comparer la variabilité de deux procédés. Deux échantillons aléatoires indépendants donnent les résultats suivants :

Procédé A $n_1 = 13$ $\bar{x}_1 = 1,5$ $S_1^2 = 12$

Procédé B $n_2 = 25$ $\bar{x}_2 = 2,0$ $S_2^2 = 15$

Tester l'égalité des deux variances, au seuil de 5%. On suppose la normalité des deux populations.

N.B.

- arrondir les résultats à la deuxième décimale !

-Vous aurez besoin de certaines données parmi les suivantes :

- Si Z suit la loi normale centrée réduite :

$$P(Z > 1,01) = 0,16 \quad P(Z > 1,65) = 0,05 \quad \text{et} \quad P(Z > 1,96) = 0,025.$$

- Si $X(n)$ est une variable aléatoire de **Khi-deux** à n degrés de liberté, on a :

$$P(X(9) > 16,92) = 0,05 \quad P(X(10) > 20,48) = 0,025 \quad \text{et} \quad P(X(9) > 19,02) = 0,025.$$

- Si $F(n,m)$ est une variable aléatoire de **Fisher**, on a :

$$P(F(24,12) > 3,02) = P(F(12,24) > 2,54) = 0,025$$

$$P(F(25,13) > 2,88) = P(F(13,25) > 2,48) = 0,025.$$

Epreuve de Statistique IV

Problème (17pts): dans une certaine région montagneuse, un représentant de la Fédération de la Randonnée Pédestre éditant les Topo-Guides TG2 s'est livré à une petite enquête pour connaître le temps de montée d'un randonneur. Les résultats obtenus sont dans le tableau suivant:

Temps de montée en minutes	[50-60[[60-70[[70-90[[90-100[[100-120]
Effectif	2	8	25	10	5

- 1) (5pts): En supposant la normalité du temps de montée, tester l'hypothèse que le temps moyen de montée est de 80 mn au risque de 5%.
- 2) (3pts): En supposant toujours la normalité du temps de montée, tester, avec un risque de 5%, l'hypothèse $H_0 : \sigma^2 = 225$ " contre l'hypothèse $H_1 : \sigma^2 > 225$ ".
- 3) (5pts): Tester cette hypothèse de normalité faites en 1) et 2), au risque de 5% (moyenne-variance inconnues).
- 4) (4pts): En effectuant son enquête il a aussi demandé aux randonneurs si le TG2 était leur chemin préféré pour monter au sommet de la montagne. 32 des personnes interrogées lui ont répondu :oui.
Tester l'hypothèse que plus de la moitié des randonneurs préfère emprunter le TG2 avec un risque de 5%.

Calculer la *p-value* et conclure.

Exercice (3pts): Un système assez sommaire de remplissage de doses a été fabriqué. Pour limiter les risques, 3 doses sont fabriquées chaque matin entre 7 et 8 h. N'ayant pas d'instrument suffisamment précis pour mesurer le volume, le médecin pèse chaque dose fabriquée, et note la moyenne et l'étendue des poids des 3 doses. Au bout de 30 jours de fabrication, la moyenne des 30 moyennes est égale à 3,45 et la moyenne des 30 étendues à 0,32.

- 1) Déterminer les limites de contrôle des cartes de contrôle de la moyenne et de l'étendue.
- 2) Quel est le nombre moyen d'échantillons à prélever avant de détecter un dérèglement du processus de remplissage conduisant à une déviation de la moyenne de 1,5écarts-type?

N.B

- arrondir tous les résultats à la deuxième décimale !
- Vous aurez besoin de certaines données parmi les suivantes :

➤ Si $X(n)$ est une variable aléatoire de *Khi-deux* à n degrés de liberté, on a :

$$P(X(49) > 66,34) = 0,05 \quad P(X(49) > 70,22) = 0,025 \quad \text{et} \quad P(X(50) > 71,42) = 0,025.$$

$$P(X(1) > 3,84) = 0,05 \quad P(X(2) > 5,99) = 0,05 \quad P(X(3) > 7,81) = 0,05 \quad \text{et} \quad P(X(4) > 9,49) = 0,05.$$

➤ Si $T(n)$ est une variable aléatoire de *Student* à n degrés de liberté, on a :

$$P(T(49) > 2) = 0,025 \text{ et } P(T(50) > 1,68) = 0,05 \text{ et } P(T(48) > 2,01) = 0,025.$$

➤ Si Z suit la loi normale centrée réduite : u sont les valeurs critiques de Z :
 $P(Z > u) = \alpha$ et $P(Z > 2,6) = 0$.

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,50	0,50	0,49	0,49	0,48	0,48	0,48	0,47
0,1	0,46	0,46	0,45	0,45	0,44	0,44	0,44	0,43
0,2	0,42	0,42	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40	0,39
0,3	0,38	0,38	0,37	0,37	0,37	0,36	0,36	0,36
0,4	0,34	0,34	0,34	0,33	0,33	0,33	0,32	0,32
0,5	0,31	0,31	0,30	0,30	0,29	0,29	0,29	0,28
0,6	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,25	0,25
0,7	0,24	0,24	0,24	0,23	0,23	0,23	0,22	0,22
0,8	0,21	0,21	0,21	0,20	0,20	0,20	0,19	0,19
0,9	0,18	0,18	0,18	0,18	0,17	0,17	0,17	0,17
1	0,16	0,16	0,15	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14
1,1	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12
1,2	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10
1,3	0,10	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
1,4	0,08	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07	0,07
1,5	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
1,6	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,05	0,04	0,04
1,7	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
1,8	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
1,9	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02
2	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
2,1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
2,2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2,3	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2,4	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2,5	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

TABLEAU DES COEFFICIENTS POUR LE CALCUL DES CARTES									
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d₂	1,13	1,69	2,06	2,33	2,53	2,7	2,85	2,97	3,08
A₂	1,88	1,02	0,73	0,58	0,48	0,42	0,37	0,34	0,31
D₃	0	0	0	0	0	0,07	0,14	0,18	0,22
D₄	3,27	2,57	2,28	2,11	2	1,92	1,86	1,82	1,78

Epreuve De Statistique IV (Rattrapage)

Problème : Pour votre stage de fin d'études, vous avez été admis dans un centre proposant diverses activités de remise en forme. Le directeur aimerait proposer une nouvelle activité en espérant attirer de nouveaux clients parmi la population potentielle, qui est la population des femmes pratiquant déjà une activité physique. Votre thème de stage est d'étudier la faisabilité de cette nouvelle activité.

1) Enthousiasmé par le sujet, vous construisez un questionnaire pour effectuer une étude de marché. Parti sur le terrain, au bout de 2 jours, vous avez réussi à renseigner 30 questionnaires sur la population potentielle. Sur ces 30 personnes interrogées 9 trouvaient le projet intéressant. Tester l'hypothèse que moins de 40% de la population potentielle trouvaient le projet intéressant avec un risque de 5%. Calculer la *p-value* et conclure.

2) Dans ce questionnaire il était demandé quel était le montant maximum que la personne accepterait de consacrer pour une séance de cette activité. Les résultats sont comme suit (Montant en cent DH) :

2	4	3	2	3	3	2	3	3	4	4	2	3	5	4	3	4	4	4	4	4	4	5	4	4	4	2	4	3	4
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

a) Citer tous les tests de normalité que vous connaissez.

b) Quel test peut-on proposer pour répondre à la question « est ce que ces 30 données proviennent d'une population Normalement distribuée ? ». Effectuer ce test ; ($\alpha=2\%$).

3) En concertation avec votre maître de stage vous décidez de compléter votre enquête sur 130 personnes supplémentaires, pour obtenir un échantillon global de 160 personnes. Dans ce questionnaire il était aussi demandé la tranche d'âge à laquelle appartenait la personne interrogée. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

Age	[20 ; 30[[30 ; 40[[40 ; 50[[50 ; 60[[60 ; 70[
effectif	5	26	74	47	8

Tester l'hypothèse que l'âge moyen de la population potentielle est supérieur à 45 ans. ($\alpha=5\%$)

Exercice : Une dimension caractéristique est surveillée sur une portière de voiture. On a prélevé des échantillons de taille 4 et obtenu : Moyenne des moyennes = 0,2 Moyenne des étendues = 0,3

1) Déterminer les limites de contrôles des cartes de contrôle de la moyenne et des étendues.

2) Quel est le nombre moyen d'échantillons à prélever avant de détecter une déviation de la moyenne de 2 écarts-type.

N.B

- arrondir tous les résultats à la deuxième décimale !
- Vous aurez besoin de certaines données parmi les suivantes :

➤ Si $X(n)$ est une variable aléatoire de **Khi-deux** à n degrés de liberté, on a :
 $P(X(29) > 42,56) = 0,05$

➤ Si $T(n)$ est une variable aléatoire de **Student** à n degrés de liberté, on a :
 $P(T(159) > 1,96) = 0,025$ et $P(T(159) > 1,65) = 0,05$.

➤ Si Z suit la loi normale centrée réduite : u sont les valeurs critiques de Z :
 $P(Z > u) = \alpha$ et $P(Z > 2,6) = 0$ et :

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,50	0,50	0,49	0,49	0,48	0,48	0,48	0,47
0,1	0,46	0,46	0,45	0,45	0,44	0,44	0,44	0,43
0,2	0,42	0,42	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40	0,39
0,3	0,38	0,38	0,37	0,37	0,37	0,36	0,36	0,36
0,4	0,34	0,34	0,34	0,33	0,33	0,33	0,32	0,32
0,5	0,31	0,31	0,30	0,30	0,29	0,29	0,29	0,28
0,6	0,27	0,27	0,27	0,26	0,26	0,26	0,25	0,25
0,7	0,24	0,24	0,24	0,23	0,23	0,23	0,22	0,22
0,8	0,21	0,21	0,21	0,20	0,20	0,20	0,19	0,19
0,9	0,18	0,18	0,18	0,18	0,17	0,17	0,17	0,17
1	0,16	0,16	0,15	0,15	0,15	0,15	0,14	0,14
1,1	0,14	0,13	0,13	0,13	0,13	0,13	0,12	0,12
1,2	0,12	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,10	0,10
1,3	0,10	0,10	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09	0,09
1,4	0,08	0,08	0,08	0,08	0,07	0,07	0,07	0,07
1,5	0,07	0,07	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06
1,6	0,06	0,06	0,06	0,06	0,06	0,05	0,04	0,04
1,7	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
1,8	0,04	0,04	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03
1,9	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,03	0,02	0,02
2	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
2,1	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
2,2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2,3	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2,4	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
2,5	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

TABLEAU DES COEFFICIENTS POUR LE CALCUL DES CARTES									
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A ₂	1,88	1,02	0,73	0,58	0,48	0,42	0,37	0,34	0,31
D ₃	0	0	0	0	0	0,07	0,14	0,18	0,22
D ₄	3,27	2,57	2,28	2,11	2	1,92	1,86	1,82	1,78

Table of Critical Values for the Lilliefors Test for Normality

One-tailed	.20	.15	.10	.05	.01
Two-tailed	.40	.30	.20	.10	.02
n = 4	.300	.319	.352	.381	.417
5	.285	.299	.315	.337	.405
6	.265	.277	.294	.319	.364
7	.247	.258	.276	.300	.348
8	.233	.244	.261	.285	.331
9	.223	.233	.249	.271	.311
10	.215	.224	.239	.258	.294
11	.206	.217	.230	.249	.284
12	.199	.212	.223	.242	.275
13	.190	.202	.214	.234	.268
14	.183	.194	.207	.227	.261
15	.177	.187	.201	.220	.257
16	.173	.182	.195	.213	.250
17	.169	.177	.189	.206	.245
18	.166	.173	.184	.200	.239
19	.163	.169	.179	.195	.235
20	.160	.166	.174	.190	.231
25	.142	.147	.158	.173	.200
30	.131	.136	.144	.161	.187
n > 30	.736/√n	.768/√n	.805/√n	.886/√n	1.031/√n